2) K, Λ σύνολα $K \subseteq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \subseteq \Lambda - K$

<u>Απόδειξη:</u> $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \Lambda$. Τότε $K - \Lambda = \emptyset \subseteq \Lambda - K$.
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $K - \Lambda \subseteq \Lambda - K$

νδο $K \subseteq \Lambda$: Έστω x με $x \in K$.
νδο $x \in \Lambda$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \notin \Lambda$.
Τότε $x \in K - \Lambda$ κ' επειδή $K - \Lambda \subseteq \Lambda - K$ προκύπτει $x \in \Lambda - K$
άρα $x \in \Lambda$ κ' $x \notin K$, άτοπο.
Άρα $K \subseteq \Lambda$.

6) X, Y, Z, W σύνολα
(i) $(x,y) \notin X \times Y \Leftrightarrow x \notin X \vee y \notin Y$
(ii) $(X \times Y) - (Z \times W) = [X \times (Y - W)] \cup [(X - Z) \times Y]$

(i) $(x,y) \notin X \times Y \Leftrightarrow \sim((x,y) \in X \times Y) \Leftrightarrow \sim(x \in X \wedge y \in Y)$
$\Leftrightarrow (\sim(x \in X)) \vee (\sim(y \in Y)) \Leftrightarrow x \notin X \vee y \notin Y$

Για τυχόντα x, y
$(x,y) \in (X \times Y) - (Z \times W) \Leftrightarrow (x,y) \in X \times Y \wedge (x,y) \notin Z \times W$
$\Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \wedge (x \notin Z \vee y \notin W) \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin W) \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \vee (x \in X \wedge y \in Y - W) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x,y) \in X \times (Y - W)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in X \times (Y - W) \cup (X - Z) \times Y$
Άρα $(X \times Y) - (Z \times W) = (X \times (Y - W)) \cup [(X - Z) \times Y]$

3) Αν A, B δύο σύνολα
(i) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
(ii) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

(i) Έστω τυχόν K.
$K \in P(A \cap B) \Leftrightarrow K \subseteq A \cap B$
$\Leftrightarrow K \subseteq A \wedge K \subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \wedge x \in P(B)$
$\Leftrightarrow x \in P(A) \cap P(B)$
Συνεπώς $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(ii) $\Rightarrow$) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $P(A) \cap P(B) \overset{(i)}{=} P(A \cap B) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\Leftarrow$)* Αν το $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\exists x \in A \cap B$, άρα $x \in A$ κ' $x \in B$ } το ίδιο.
Άρα $\{x\} \subseteq A$ κ' $\{x\} \subseteq B$
άρα $\{x\} \in P(A)$ κ' $\{x\} \in P(B)$
άρα $\{x\} \in P(A) \cap P(B)$
άρα $\{x\} \in \{\emptyset\}$
άρα $\{x\} = \emptyset$, άτοπο. Επομένως $A \cap B = \emptyset$.
* Υποθέτουμε ότι $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$

1) (i) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
Λύση:
· Έστω τυχόν x
$x \in (A-B) \vee x \in A \cap B$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$ — $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ταυτολογία
$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\underbrace{x \notin B \vee x \in B}_{\text{πάντα αληθές}})$

$\Leftrightarrow x \in A$.
Άρα $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

(ii) ✓

(iii) $(A \cap B) - (A \cap \Gamma) = A \cap (B - \Gamma)$

Λύση: Έστω τυχόν x
$x \in (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin A \cap \Gamma$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin \Gamma)$
$\Leftrightarrow (\underbrace{x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A}_{\text{πάντα ψευδές}}) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin \Gamma$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B - \Gamma$

$\Leftrightarrow x \in A \cap (B - \Gamma)$

(iv) $(A-B) \cap (\Gamma - \Delta) = (A \cap \Gamma) - (B \cup \Delta)$

Λύση: Έστω τυχόν x.

$x \in (A \cap \Gamma) - (B \cup \Delta)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap \Gamma \wedge x \notin B \cup \Delta$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \Gamma) \wedge (x \notin B \wedge x \notin \Delta)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in \Gamma \wedge x \notin \Delta)$

έχω ίδιο συζεύξεις

$\Leftrightarrow x \in A - B \wedge x \in \Gamma - \Delta$

$\Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (\Gamma - \Delta)$

Μπορώ να αλλάξω τη σειρά, επειδή έχω ίδιο συζεύξεις.